Математическое представление триграмм

*

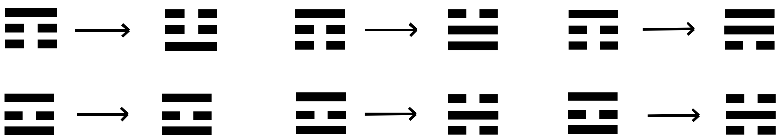
В древнекитайской культуре имелся ряд составленных из чисел и фигур объектов, издавна интересовавших её исследователей: *три*- и *гексаграммы*, *пентаграмма*, квадрат *ло-шу* и т.д. В Европе XVIII века гексаграммы стимулировали популяризацию Лейбницем открытой незадолго до этого рядом математиков двоичной системы счисления[1].

Изучение этих объектов с помощью аппарата современной математики позволяет поставить некоторые интересные математические задачи; имеющие "китайскую специфику".

I. Симметрии и числовые представления триграмм.

Нетрудно видеть, что на три/ гексаграммах, как геометрических объектах, действуют определённые преобразования, симметрии, переводящие их в себя. Это, прежде всего, наиболее часто встречающиеся в работах по *ицзинистике* преобразование *фань* (f), при котором три/ гексаграмма "переворачивается" – отражается от центральной линии; и преобразование *дуй* (d), при котором каждая черта три/ гексаграммы переходит в противоположную; *инь* (прерывистая, – –) в *ян* (сплошная, ——) и обратно. Есть и другие симметрии, переводящие фигуры триграмм в себя. Преобразование s_1: нижняя черта триграммы переходит в противоположную; аналогично s_2, s_3. Очевидно, $d = s_1{*}s_2{*}s_3$. Далее, преобразование s_{12} – 1 и 2 черты триграмм переходят в противоположные; аналогично s_{23}, s_{13}. Далее, $f_{12} = f{*}s_{12}$ (изменение 1 и 2 черты и переворачивание); аналогично f_{23}, f_{13}. Наконец, $\varepsilon = f{*}d$ (= изменение всех черт и переворачивание; = композиция *фань* и *дуй*). Полученное множество симметрий замкнуто, имеет единичный элемент и для каждого элемента имеет обратный; т.о. образует группу. В ней 16 элементов; она неабелева. Обозначим её H_{16}. Примеры:

фань (f) *дуй* ($d = s1{*}s2{*}s3$) *инь-ян* ($i = f{*}s1{*}s2{*}s3$)

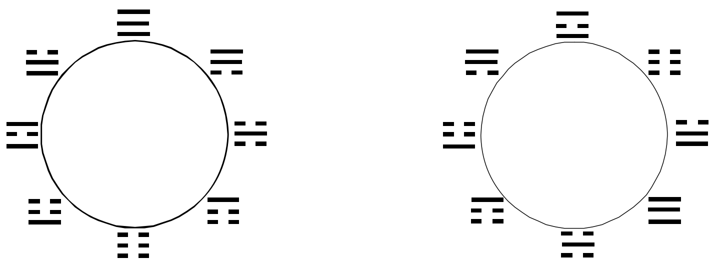


[1] Двоичную систему счисления использовал английский математик Т. Хариот (1560 - 1621 гг.), изображал в ней числа и действия над ними. Хариот почти не публиковал своих работ и его открытие в то время осталось малоизвестным. За ним другие учёные описали (и опубликовали) системы счисления с разными основаниями – Ж. Лобковиц, Э. Вейгель. Двоичная система переоткрыта Лейбницем (1646 - 1716 гг.).

Геометрические симметрии расположения триграмм

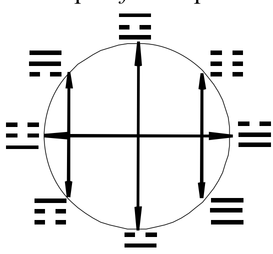
Наиболее известными расположениями триграмм являются т.н. круговые порядки *Фу Си* и *Вэнь вана*. Порядок *Фу Си* (рис I.1а) обладает заметной симметрией, например, при зеркальном отражении относительно центра круга триграммы преобразуются по правилу *дуй* – замена всех черт на противоположные. (Описание других симметрий в порядке *Фу Си* см. ниже). В противоположность этому, порядок *Вэнь вана* (рис I.1б) не обладает столь явно выраженной (геометрической) симметрией. Вместе с тем, определённые симметрии в расположении *Вэнь вана* всё же имеются. Например, линии на рис I.2. связывают пары триграмм, находящихся в отношении "переворачивания" (*фань*) и изменения черт на противоположные (*дуй*). Другими словами, отображение, обозначенное на рисунке I.2 стрелками, действует на триграммы как симметрия *фань*дуй* (*f*d*). (Описание других симметрий в порядке *Вэнь вана* см. ниже).

Рис. I.1. Круговые расположения триграмм



а) порядок *Фу Си* б) порядок *Вэнь вана*

Рис. I.2. Действие симметрии *f*d* на расположении ТГ *Вэнь вана*



***Хэ-ту*, *ло-шу*, *инь-ян* связи чисел**. Для вспомогательных целей введём некоторые отношения на множестве пар чисел $\{1,\ldots,10\}$. Будем называть пару чисел (x, y) *хэ-ту* парой, или отношением, если $|x-y|=5$ (это (1, 6), (2, 7), … пары); *ло-шу* парой, или отношением, если $x+y=10$ (это (1, 9), (2, 8),… пары); *инь-ян* парой, или отношением, если

$x+y = 5/\ 15$ (это (1, 4), (2, 3), (6, 9), (7, 8), пары). Названия введены по соответствующим фигурам. Будем рассматривать также пары *ближайшее число*: (1, 2), (2, 3)…; и *порождение* (3, 9), (9, 7), (7, 1), (1, 3); (2, 4), (4, 8), (8, 6), (6, 2). Для *порождения* второе число получается умножением первого на $3/2$ для нечётных/чётных и взятием остатка по mod 10). Для этих отношений чисел (*инь-ян*,…) можно ввести соответствующие симметрии, действующие на $\{1,\ldots,10\}$.

Взаимную связь отношений *инь-ян*, *ло-шу*, *хэ-ту* иллюстрирует следующая лемма:

Лемма I.1. 1). Пусть $\{X, Y, Z\}$ – три числа из набора $\{1,\ldots,10\}$. Пусть в треугольнике XYZ две стороны представляют какие-либо два из отношений *хэ-ту*, *ло-шу*, *инь-ян*. Тогда третья сторона представляет оставшееся отношение.

1'). Пусть $g_3 = g_1 * g_2$. Пусть g_1, g_2 – какие-либо 2 из симметрий *хэ-ту*, *ло-шу*, *инь-ян*. Тогда g_3 представляет собой третью симметрию.

Отношения *инь-ян*, *ло-шу*, *хэ-ту* тесно связаны с соотношениями между степенями чисел 3 и 2. Это демонстрируют следующие леммы:

Лемма I.2. 1). Умножение каждого числа пары (x, y) на 3 сохраняет отношение *хэ-ту*, *ло-шу*, *инь-ян*.

2). $\{3^{\mathrm{m}}, 3^{\mathrm{n}}\}$, $\{2^{\mathrm{m}}, 2^{\mathrm{n}}\}$находятся в отношении *ло-шу* $\leftrightarrow |\mathrm{m} - \mathrm{n}| = 2$.

2'). $\{3^{\mathrm{m}}, 2^{\mathrm{n}}\}$находятся в отношении *инь-ян* или *хэ-ту* $\leftrightarrow$ (m – n) делится на 2.

Лемма I.3. 1). Пусть (x, y) – *хэ-ту* пара. Тогда пара ($2x$, $3y$) для x нечётного – *ло-шу*; для x чётного – *инь-ян*.

2). Пусть (x, y) – *ло-шу* пара. Тогда пара ($2x$, $3y$) *хэ-ту* для x нечётного и $2x = 3y$ (mod 10) для чётного.

3). Пусть (x, y) – *инь-ян* пара. Тогда пара ($2x$, $3y$) *хэ-ту* для x чётного и $2x = 3y$ (mod 10) для x нечётного.

Еще несколько лемм, касающихся степеней чисел 3 и 2.

Лемма I.4. 1). $3^{\mathrm{m}+4} = 3^{\mathrm{m}}$ (mod 10); $2^{\mathrm{m}+4} = 2^{\mathrm{m}}$ (mod 10)

2). $3^{\mathrm{k}} * 2^{\mathrm{n}} = 2^{-\mathrm{k}+\mathrm{n}\ (\mathrm{mod}\ 4)}$ (mod 10)

Лемма I.5. 1). $6*n = 1*n$ (mod 5) $= n$ или $n + 5$ (mod 10). Таким образом, умножение на 6 оставляет чётные числа на месте, по mod 10, а нечётные переводит в *хэ-ту*- дополнение; является некоторым аналогом геометрического отражения.

2). Если $y=3x$, то $x=2y$ (mod 5). Таким образом, умножение на 2 является некоторым аналогом деления на 3.

Здесь и далее, если особо не оговаривается, числа берутся по mod 10, а показатели степеней чисел 3 и 2, учитывая лемму I.4, по mod 4.

Числовое представление триграмм

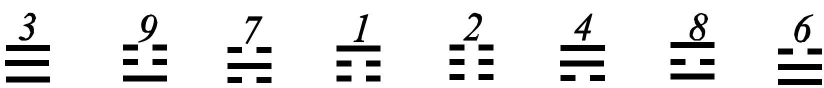
Представление Лейбница. Со времен Лейбница стало популярным представлять ТГ как двоичные записи чисел $\{0,\ldots,7=2^3 - 1\}$, полагая, что черта *инь* (– –) соответствует *0*, а *ян* (——) *1* (или наоборот).

Такое представление триграмм сохраняет их "двоичный смысл" и может использоваться для их интерпретации в терминах двоичной логики. Вместе с тем, нетрудно видеть, что такое представление не сохраняет симметрий, действующих на фигурах триграмм – т.е. большинство геометрических симметрий не переходят в "содержательные" симметрии чисел. Кроме того, при таком представлении число *5* не играет выделенной центральной роли, как это имеет место в китайской нумерологии ("учении о символах и числах"; *сян шу чжи сюэ*). Наконец, при использовании такой "кодировки" порядок *Вэнь вана* переходит в кажущийся случайным набор чисел (см. рис. I.3б).

Можно попытаться найти числовое представление триграмм, которое было бы лишено этих недостатков; т.е. более точно выражало/ сохраняло бы "суть" триграмм, (проявляющуюся в т.ч. в их симметриях) и вообще "числовую специфику" китайской культуры.

***S*-представление.** Для ранней китайской культуры характерно сопоставление "Небо" → *3*, "Земля" → *2*. "*Совершенномудрые обозначили Небо тройкой, а Землю двойкой…*". Примем это как начало числового представления триграмм: *Тянь* (Небо) → *3*, *Кунь* (Земля) → *2*. Как сопоставлять числа триграммам дальше?

В китайской нумерологии триграммы делятся на *мужские* и *женские*, а именно, триграммы с нечётным ("мужским") количеством непрерывных чёрт считаются "мужскими", с чётным – "женскими". Также для триграмм имеют место "родственные" отношения: *Тянь* (Небо) – "отец", мужские триграммы *Чжэнь* (Гром), *Кань* (Вода), *Гэнь* (Гора) – соответственно, 1, 2 и 3 "сын"; *Кунь* (Земля) – "мать", женские триграммы *Сюнь* (Ветер), *Ли* (Огонь), *Дуй* (Водоём) – соответственно, 1, 2 и 3 "дочь". Примем, что при сопоставлении триграммам чисел *порождение* очередной "мужской" триграммы соответствует умножению очередного числа на *3*, "женской" – аналогично на *2*. Т.е. "1 сын" → *3*3*; "2 сын" → *3*3*3*;…; "1 дочь" → *2*2*;… (mod *10*).



Небо	*Гром*	*Вода*	*Гора*	*Земля*	*Ветер*	*Огонь*	*Водоем*
Отец	1 сын	2 сын	3 сын	Мать	1 дочь	2 дочь	3 дочь

Для 8 триграмм таким образом будут исчерпаны все числа из промежутка *1-10*, кроме *5* и *10*.

Обоснованиями такого соответствия триграммы ↔ числа, с точки зрения китайской нумерологии, являются:

• *мужские* ТГ соответствуют *нечётным* числам, *женские* ТГ – *чётным*;

• числа *5*, *10* играют выделенную роль – уже не появляются среди сопоставляемых чисел; как это и естественно. (Их зато можно сопоставить *Великому пределу*).

• симметрии триграмм переходят в симметрии чисел (см. ниже)

Основным обоснованием такого числового представления триграмм, впрочем, является обнаружение с его помощью ряда красивых математических соотношений; в частности:

- в расположении *Вэнь вана* появляется числовая симметрия (см. рис. I.4) - в отличие от несимметричного представления Лейбница;

- в расположении *Фу Си* выявляется числовая симметрия, эквивалентная симметрии магического квадрата *ло-шу* (см. ниже).

S-представление также можно считать "двоичным", только вместо *0* и *1*, как чисел, обозначающих *инь-ян*/ ложь-истина, принимаются числа *2* и *3*. *S*- представление можно рассматривать как отображение десяти первых чисел {*1*,…,*10*}в десять фигур: *8* триграмм + символ *Великого Предела* (*Тай-цзи*); по указанному выше правилу.

Примечание. Соответствие триграммы ↔ числа, приводимое для <u>*четырёх*</u> триграмм, стоящих в расположении *Вэнь вана* на основных позициях (юг- север- восток- запад), комментатором *И Цзина* Мэн Си (–I в.)[2], совпадает с *S*- представлением.

Симметрии числового *S*-представления. При *S*- представлении триграмм числами ряд симметрий ТГ переходит в отношения чисел.

Теорема I.1. 1) Симметрия $\varepsilon = f{*}d$ (изменение всех черт и переворачивание) для триграмм переходит в отношение *инь-ян* для соответствующих чисел. Или иначе: числа (a, b) находятся в отношении *инь-ян* ↔ соответствующие им триграммы T_a T_b связаны симметрией ε.

2) Симметрия s_{13} (изменение 1 и 3 черты) для триграмм переходит в отношение *ло-шу* для соответствующих чисел.

3) Симметрия $f{*}s_2$ (изменение 2 черты и переворачивание) для триграмм переходит в отношение *хэ-ту* для соответствующих чисел.

---

[2] *Агеев Н.* "Календарные приложения "Ицзина"" // "Китайская классическая "Книга Перемен" и современная наука", М., 2003 г.

4) Симметрия $f{*}s_{12}$ (изменение 1 и 2 черты и переворачивание) для триграмм переходит в отношение порождение для соответствующих чисел.

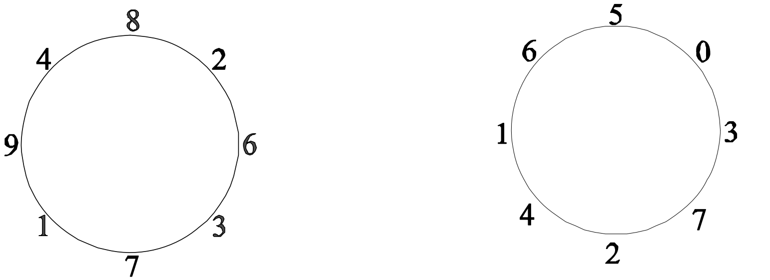
5) Симметрия $f{*}s_3$ для триграмм переходит в отношение ближайшее число для пар (*1*, *2*), (*3*, *4*), затем "переход через центр" и далее (*7*, *6*), (9, *8*). Симметрия $f{*}s_1$ действует аналогичным образом в обратном направлении.

Итак, при числовом представлении триграмм по правилу *S*, ряд симметрий триграмм переходит в симметрии чисел, притом имеющие "китайскую специфику".

***S*-представление для круговых порядков триграмм.**

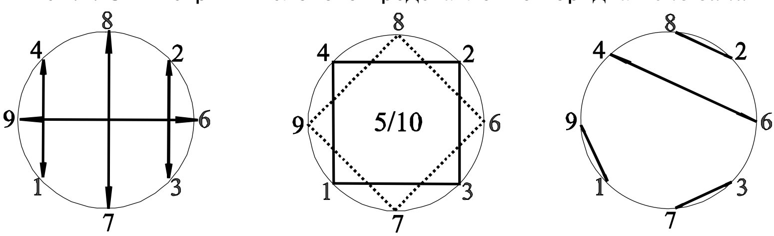
Числовое *S*-представление порядка ТГ *Вэнь вана* обладает рядом заметных симметрий. Прежде всего, в нём имеется симметрия *инь-ян* (рис. I.4а), соответствующая в ТГ- виде преобразованию $\varepsilon = f{*}d$. Далее, связи на рисунках I.4б и I.4в дают отношения чисел (n, $n+1$) и *ло-шу*.

Рис I.3. Числовой порядок *Вэнь вана*



а) *S*- представление б) числа "по Лейбницу"

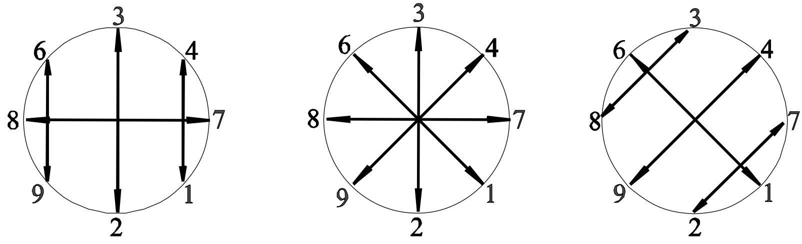
Рис I.4. Симметрии числового представление порядка *Вэнь вана*



а) связь *инь-ян* б) последовательные числа в) связь *ло-шу*

Числовое *S*-представление порядка *Фу Си* также оказывается симметричным:

Рис. I.5. Симметрии числового представления порядка *Фу Си*



а) связь *инь-ян* б) $3^m \leftrightarrow 2^m$ в) связь *хэ-ту*

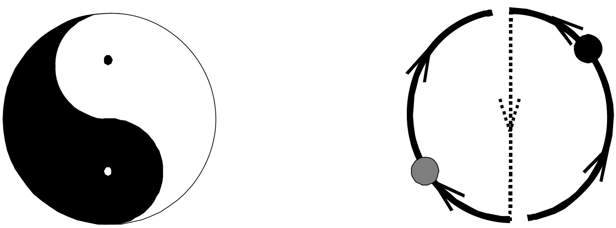
II. Дуально-спиральная симметрия.

Будем называть фигуру Φ дуально-спирально симметричной, если она представляется в виде суммы непересекающихся фигур Φ_+ и Φ_- таких что:

1) Φ_+ и Φ_- переходят друг в друга при повороте на $\pi/2$ относительно некоторого центра; 2) Φ_+ и Φ_- могут быть соотнесены (в каком то смысле) с + и – ; 3) Внутри Φ_+ содержится (небольшая) часть, соотносимая с –; внутри Φ_- содержится симметричная ей (небольшая) часть, соотносимая с +

Стандартным и основным примером дуально-спиральной симметрии является чертеж *Великого предела* (*Тай цзи*), состоящий из *инь* и *ян* частей (рис. II.1а). Можно строить и другие аналогичные фигуры (рис. II.1б).

Рис II.1 а) Чертеж *Великого предела* б) Дуально-спиральная симметрия



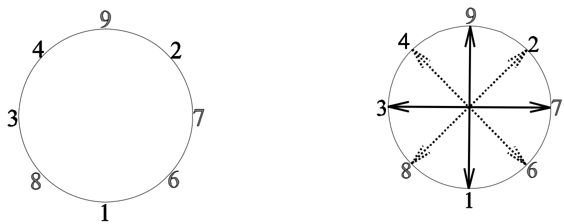
III. Симметрии *ло-шу*.

Для удобства будем далее представлять числа *ло-шу* расположенными на окружности (рис III.1а).

Первой и основной симметрией этого объекта является *ло-шу* симметрия: числа, зеркально симметричные относительно центра, дополняют друг друга до *10*. Ей соответствует симметрия триграмм $s_1 * s_3$; а в числовом *S*-представлении: $3^k \rightarrow 3^{k+2}$; $2^l \rightarrow 2^{l+2}$ (рис III.1б).

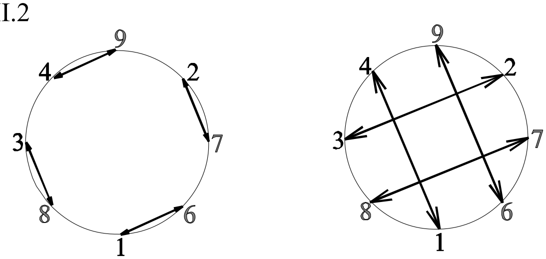
Симметричными получаются и другие геометрические объекты, образуемые при действии на *ло-шу* рассмотренной выше группы симметрий H_{16} (её числового представления). Так, симметрия $f{*}s_2$, отвечающая связи *хэ-ту*, даёт на фигуре *ло-шу* связи, показанные на рис III.2а; действие симметрии $f{*}s_1{*}s_2{*}s_3$ (*инь-ян*) даёт на *ло-шу* фигуру III.2б. Вообще каждой симметрии из H_{16} отвечает на *ло-шу* некоторая *геометрическая* симметрия.

Рис. III.1



а) *ло-шу* б) *ло-шу* симметрия

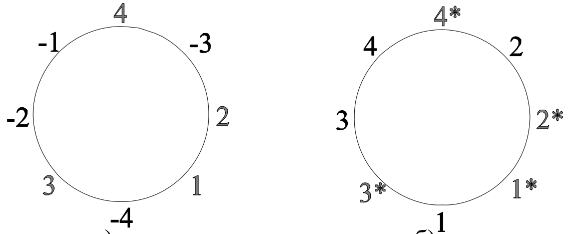
Рис. III.2



а) *хэ-ту* симметрия на *ло-шу* б) *инь-ян* симметрия на *ло-шу*

Рисунки III.3 иллюстрируют дуально-спиральную симметрию *ло-шу*. На рис. III.3 а) из *ло-шу* вычтено число *5*. Рисунок делится на две симметричные части, состоящие из + и – чисел, в каждой из которых есть "вкрапления" другой. Изображение *ло-шу* по mod *5* (рис. III.3 б) тоже выявляет его дуально- спиральную симметрию.

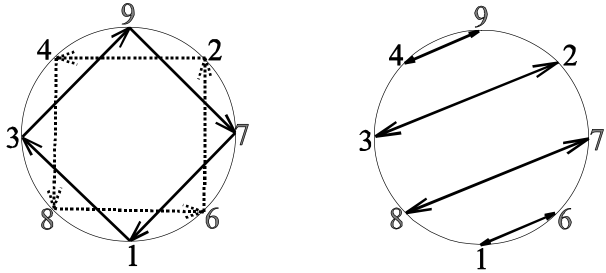
Рис. III.3



а) б)

Изобразим действие на *ло-шу* ещё некоторых симметрий из H_{16}.

Рис. III.4



а) $f*s_1*s_2$ б) $s_1*s_2*s_3$

Ряд геометрических симметрий на *ло-шу* также описывается простыми формулами числовых преобразований, хотя уже и не входящими в H_{16}. Например, поворот *ло-шу* на π/4 (т.е. применение к *ло-шу* образующей группы симметрий правильного восьмиугольника) может быть выражен формулой

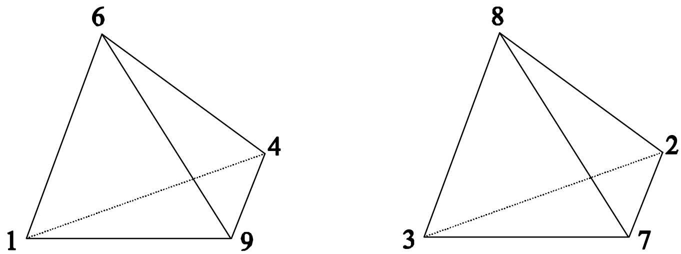
h: $3^{n} \rightarrow 2^{-n-1}$, $2^{n} \rightarrow 3^{-n}$

Очевидно, что h^2 есть поворот на π/2. Нетрудно видеть, что h^2 (в числовой форме) представляет собой (обычное) умножение всех чисел *ло-шу* на 3.

IV. Фундаментальные тетраэдры.

Будем называть *фундаментальными тетраэдрами* (ФТ) две четвёрки чисел {*1*, *4*, *9*, *6*} ($ФТ_1$) и {*3*, *2*, *7*, *8*} ($ФТ_2$); а также их расположения в вершинах правильных тетраэдров (рис. II.1).

Рис. IV.1



$ФТ_1$ $ФТ_2$

Рассмотрим набор преобразований триграмм, соответствующих *инь-ян*, *ло-шу*, *хэ-ту* преобразованиям чисел. Вместе с тождественным преобразованием этот набор образует, как легко проверить, группу; = $\{e, f*s_1*s_2*s_3, s_1*s_3, f*s_2\}$. Обозначим эту группу $H_к$.

Легко проверить, что $H_к$ изоморфна подгруппе симметрий правильного тетраэдра относительно его трёх осей.

Теорема IV.1 (основное свойство). Пусть $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ = ФТ. Тогда для всякого числа x из ФТ, пары (x, y), (x, z), (x, u), где y, z, u – оставшиеся числа из этого ФТ, представляют собой пары *инь-ян*, *ло-шу*, *хэ-ту*.

Пример: (*1*, *4*), (*1*, *9*), (*1*, *6*).

Следствие. $ФТ_i$ переводятся преобразованиями *ло-шу*, *хэ-ту*, *инь-ян* в себя.

Лемма IV.1 (связь $ФТ_i$ между собой)

$ФТ_2 = 3*ФТ_1$; $ФТ_1 = 3*ФТ_2$ (Т.е. $ФТ_i$ переводятся умножением на *3* друг в друга).

$ФТ_2 = 7*ФТ_1$; $ФТ_1 = 7*ФТ_2$

$ФТ_1 = 9*ФТ_1$; $ФТ_2= 9*ФТ_2$; $ФТ_1 = 1*ФТ_1$; $ФТ_2= 1*ФТ_2$;

Лемма IV.2. $ФТ_1 = \{3^{2n}\,;\, 2^{2n}\}$; $ФТ_2 = \{3^{2n+1}\,;\, 2^{2n+1}\}$

Будем обозначать набор последовательных чисел {*1*, *2*, *3*, *4*} как $ПЧ_1$, набор {*6*, *7*, *8*, *9*} как $ПЧ_2$.

Лемма I IV.3 (связи ФТ и ПЧ).

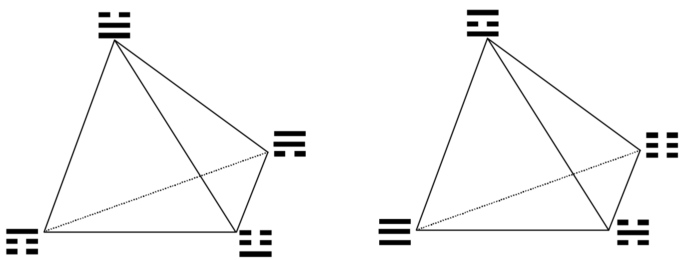
$ФТ_1 = ПЧ_1^2$; $ФТ_1 = ПЧ_2^2$

$ФТ_2 = 3*ПЧ_1^2$; $ФТ_2 = 3*ПЧ_2^2$

Эти свойства показывают, что $ФТ_i$ являются естественными объектами, обладающими определёнными свойствами симметрии.

Рассмотрим теперь представление $ФТ_i$ триграммами, именно, заменим каждое число набора $\{3^n\,;\, 2^n\}$ триграммой по правилу S.

Рис. IV.2.



$ФТ_1$ $ФТ_2$

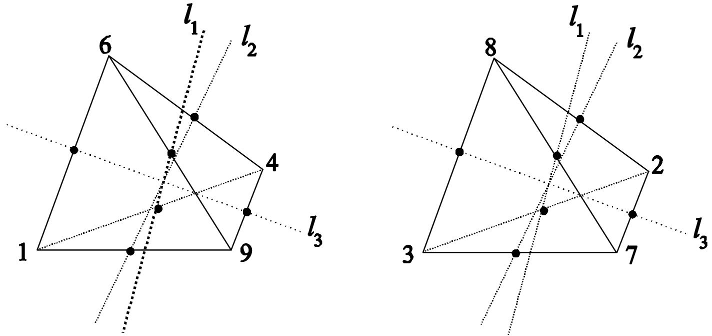
Можно заметить, что $ФТ_2$, состоящий из основных триграмм {*Небо*, *Земля*, *Огонь*, *Вода*}, является, в определённом смысле, "более важным" объектом чем $ФТ_1$.

Представление $ФТ_i$ в триграммной форме позволяет применить к ним группу преобразований триграмм H_{16}. Рассмотрим действие H_{16} на $ФТ_i$.

Теорема IV.2. 1). $ФТ_i$ инвариантны относительно группы $H_к$.

2). Действие элементов группы $H_к$ на $ФТ_i$ представляют собой отражения $ФТ_i$ относительно его осей симметрии l_1, l_2, l_3.

Рис. IV.3. Отражения относительно осей симметрии тетраэдра



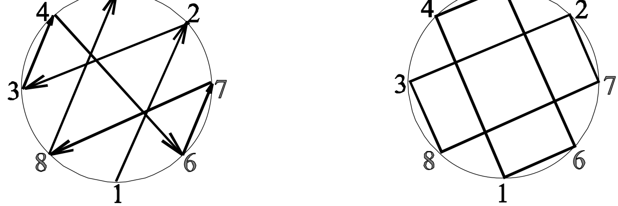
$ФТ_1$ $ФТ_2$

Нетрудно видеть, что отражение относительно оси l_1 представляет собой *инь-ян* симметрию, относительно l_2 – *ло-шу* симметрию, относительно l_3 – *хэ-ту* симметрию.

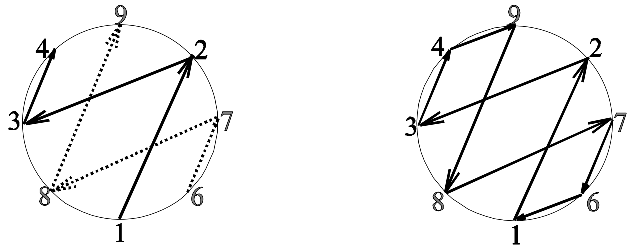
Фигуры на *ло-шу*, образованные последовательными числами $ПЧ_1$ и $ПЧ_2$, симметричны (рис. IV.4 а). Будем называть фигуру, образованную на *ло-шу* соединением последовательных чисел *путём ло-шу* (рис. IV.4 в)). Существование закономерности в *пути ло-шу* на какой-либо фигуре является признаком её дуально-спиральной симметрии.

Фигуры на *ло-шу*, образованные фундаментальными тетраэдрами ($ФТ_1$ и $ФТ_2$) также симметричны (рис. IV.4 б).

Рис. IV.6



а) ПЧ на *ло-шу* б) ФТ на *ло-шу*



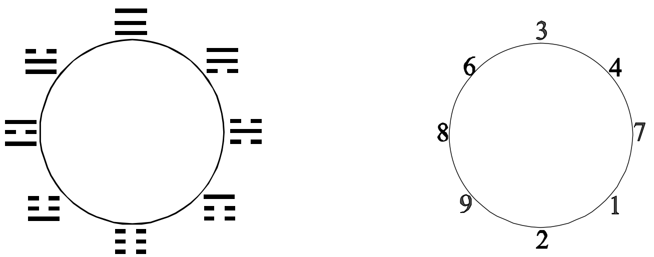
в) путь *ло-шу* г)

Рассмотрим на *ло-шу* фигуру, подобную *пути ло-шу*, только иначе соединяющую обе его части (рис. IV.6 г). Нетрудно видеть, что она задается отображением h^*: $3^n \to 2^{n+1}$, $2^n \to 3^n$. $(h^*)^2 = f*s_1*s_2 = 3^1_{лр}$. Т.о. $h^* = \sqrt{f*s_1*s_2}$. Отображение $(f*s_1*s_2)$ действует на квадрат чётных чисел как поворот на угол $-\pi/2$; на круг нечётных чисел как поворот на $+\pi/2$.

V. Симметрии порядка *Фу Си*.

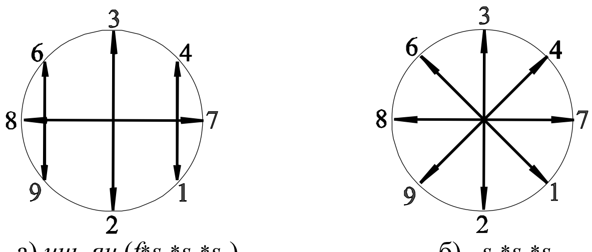
Расположение триграмм в круговом порядке *Фу Си* обладает богатым набором симметрий, хорошо заметных и в триграммной, и в числовой форме (рис I.5). В числовой форме выявляется ряд важных симметрий (прежде всего дуально-спиральная симметричность расположения *Фу Си* и его эквивалентность порядку *ло-шу*), которые в ТГ-форме практически не видны.

Рис. V.1. Расположение *Фу Си*



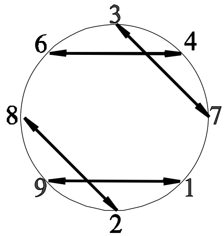
а) триграммы б) числа (S-представление)

Рис. V.2. Симметрии порядка *Фу Си* из группы H_{16}

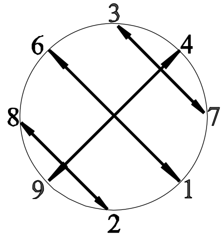


а) *инь-ян* $(f*s_1*s_2*s_3)$ б) $s_1*s_2*s_3$

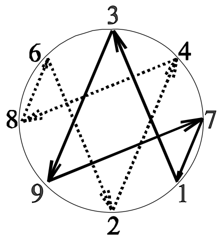
Рис. V.2 Симметрии порядка *Фу Си* из группы H_{16} (продолжение)



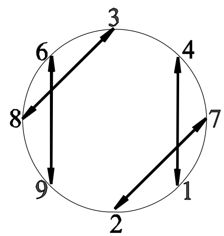
в) *ло-шу* (s_1*s_3)



г) *хэ-ту* (f*s_2)

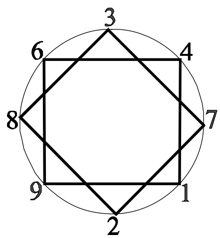


д) *порождение* (f*s_1*s_2)

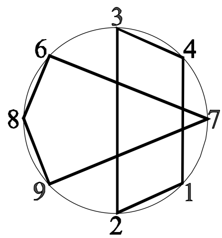


е) s_2

Рис. V.3. ФТ и ПЧ на *Фу Си*



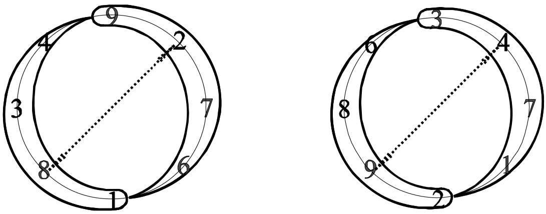
а) фундаментальные тетраэдры



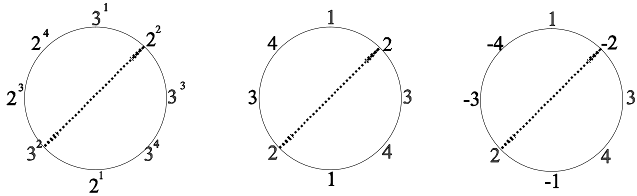
б) последовательные числа

Покажем, что в расположении *Фу Си* есть дуально-спиральная симметрия. Сопоставив фигуру *ло-шу* и числовое *S*- представление *Фу Си*, замечаем, что их структуры похожи: во второй имеются такие же две симметричные части, как и в первой, только состоят они не из двух наборов последовательных чисел, с "вкраплениями" одного в другой, а из наборов чётных и нёчетных чисел, но с такими же "вкраплениями", на тех же местах (рис. V.5 а) и б)). Более того, записав числа *S*-представления *Фу Си* в виде степеней тройки и двойки, обнаруживаем что их показатели образуют фигуру, подобную *ло-шу*, и имеющую характерный для объектов обладающих дуально- спиральной симметрией вид (рис. V.5 в) и г)). Сопоставим, для большей наглядности, степеням *тройки* значения их показателей, а степеням *двойки* значения их показателей со знаком – (т.е. полагая степень двойки как бы отрицательной степени тройки). Тогда для порядка *Фу Си*, как и для фигуры *ло-шу*, имеются две последовательности + и – чисел, с вкраплением + внутри – и обратно (рис. V.5 д)).

Рис. V.5. Дуально-спиральная симметрия *Фу Си*



а) *ло-шу* б) *Фу Си*



в) *Фу Си* г) показатели степеней д) показатели степеней

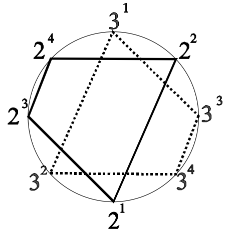
Дуально-спиральную симметрию порядка *Фу Си* выявляет и рассмотрение на нём (в *S*- представлении) *пути ло-шу*, обладающего здесь явной симметрией: $2^1 \rightarrow 2^2 \rightarrow 2^3 \rightarrow 2^4 \quad \rightarrow \quad 3^4 \rightarrow 3^3 \rightarrow 3^2 \rightarrow 3^1$

Можно указать простую формулу,связывающую (числовые) представления порядков *Фу Си* и *ло-шу*, т.е. указать способ преобразования одного порядка в другой. Эта формула такова:

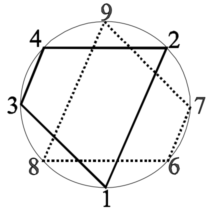
$$3^n \rightarrow (10 - n); \qquad 2^n \rightarrow n$$

Она напоминает логарифмирование.

Рис. V.6. Преобразование порядка *Фу Си* в *ло-шу*



$$3^n \rightarrow (10 - n)$$
$$2^n \rightarrow n$$



Выявление в S-представлении порядка *Фу Си* дуально- спиральной симметрии и его изоморфизма с порядком *ло-шу* ещё раз показывают удобство S- представления для изучения свойств триграмм.

VI. Симметрии порядка *Вэнь вана.*

Расположение триграмм в круговом порядке *Вэнь вана* (рис. VI.6) также обладает набором симметрий, заметных в триграммной и, особенно, в числовой форме. Как и для порядка *Фу Си* в числовом (*S*-) представлении порядке *Вэнь вана* выявляется ряд важных симметрий которые в триграммной форме практически не видны.

Рис. VI.1. Расположение триграмм по *Вэнь вану*

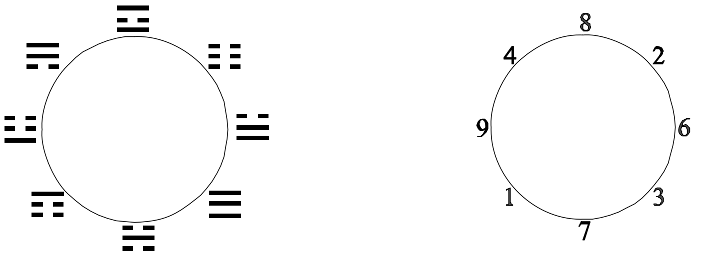
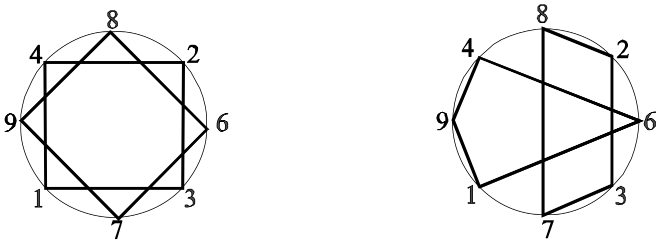
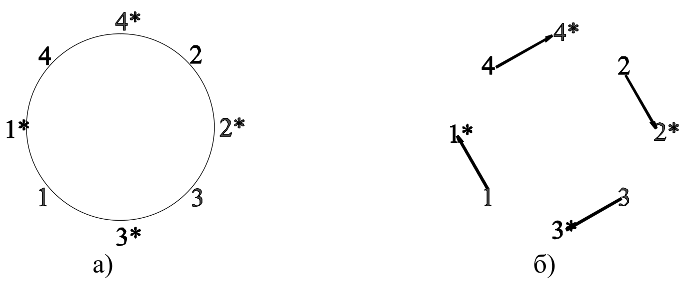


Рис. VI.2. ПЧ и ФТ на диаграмме *Вэнь вана*



Покажем, что в порядке *Вэнь вана* имеется дуально- спиральная симметрия. Заменим числа их остатками по mod *4* (рис. V3.а)).

Рис. VI.3.



Фигура VI.3а) напоминает фигуру, получавшуюся из *ло-шу* заменой чисел их остатками по mod ***5*** (рис. III.3.б)). Сходство с *ло-шу* является признаком дуально-спиральной симметрии. Окончательно выявляет эту симметрию рассмотрение на VI.3а) *пути ло-шу*, который имеет симметричный вид:

$3^* \rightarrow 2 \rightarrow 1^* \rightarrow 4 \quad \rightarrow \quad 3 \rightarrow 2^* \rightarrow 1 \rightarrow 4^*$

Выявление в числовом *S*-представлении кругового порядка *Вэнь вана* дуально- спиральной и других симметрий, практически незаметных в его триграммной форме, ещё раз показывают удобство *S*-представления для изучения свойств триграмм. Кстати, предпринятое выше рассмотрение показывает, что кажущееся беспорядочным круговое расположение триграмм *Вэнь вана* обладает, на самом деле, богатым набором симметрий, не меньшим чем у порядка *Фу Си* или *ло-шу*, которым оно, впрочем, оказывается, изоморфно.

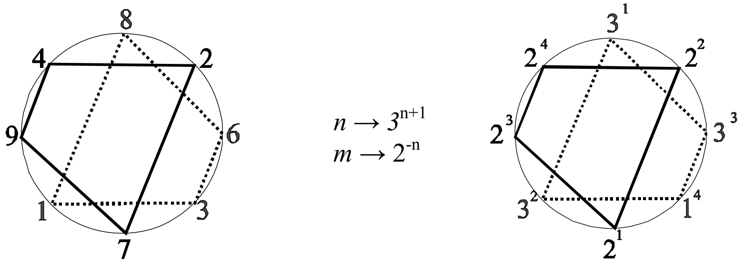
Обнаружение в порядке *Вэнь вана* дуально-спиральной симметрии позволяет находить простые формулы, связывающие это расположение чисел с другими, обладающими дуально-спиральной симметрией; в частности с расположениями *Фу Си* и *ло-шу*.

Связь порядка чисел по *Вэнь вану* с порядком чисел по *Фу Си*:

Числа из 1 части *пути ло-шу* преобразуются по формуле $n \rightarrow 2^{-n}$

Числа из 2 части *пути ло-шу* преобразуются по формуле $n \rightarrow 3^{n+1}$

Рис. VI.4. Преобразование порядка *Вэнь вана* в *Фу Си*



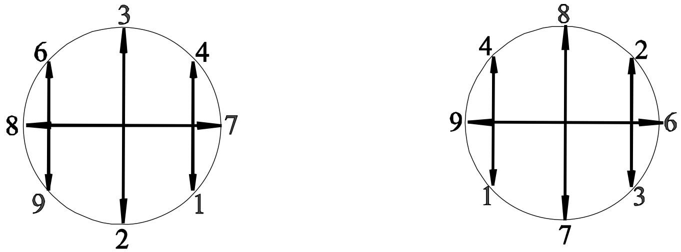
Связи порядков *Фу Си* и *Вэнь вана*

Фигуры, образованные *инь-ян* связями на расположениях *Фу Си* и *Вэнь вана* одинаковы (рис. VI.5а)).

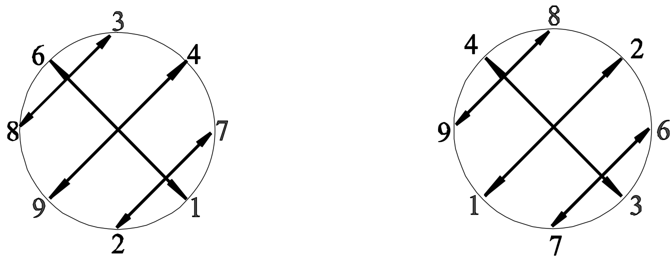
Хэ-ту фигура на *Фу Си* соответствует парам (*n*, *n*+1) на *Вэнь ване* (рис. VI.5б)).

Ло-шу фигура на *Фу Си* соответствует парам (*n*, *n*+2) на *Вэнь ване* (рис. VI.5в)).

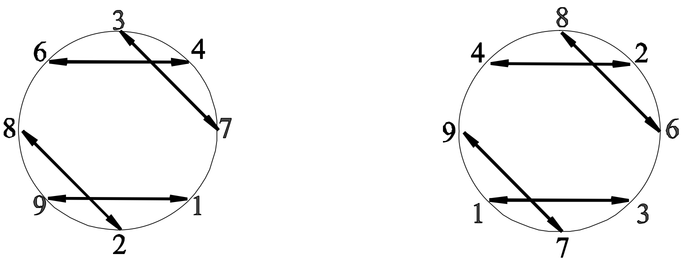
Рис. VI.5. Связи порядка *Фу Си* и *Вэнь вана*



а) *инь-ян* на *Фу Си* *инь-ян* на *Вэнь ване*



б) *хэ-ту* на *Фу Си* (n, n+1) на *Вэнь ване*

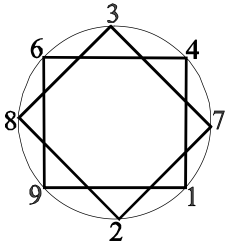


в) *ло-шу* на *Фу Си* (n, n+2) на *Вэнь ване*

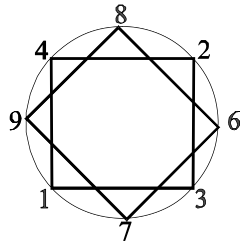
Эти соотношения следуют из вышеприведенной формулы основной связи, поскольку порядок *Фу Си* можно считать "экспонентой" от порядка *Вэнь вана*; а сдвиги на константы в показателе степени дают симметрии из H_{16}.

Имеются, однако, и более тонкие дополнительные связи между этими двумя порядками чисел. А именно, фигуры, образованные *фундаментальными тетраэдрами* на *Фу Си*, совпадают с фигурами, образованными *последовательными числами* на *Вэнь ване* (рис. VI.5 г)). И обратно, фигуры, образованные фундаментальными тетраэдрами на *Вэнь ване* совпадают с фигурами, образованными последовательными числами на Фу Си (рис. VI.5 д)).

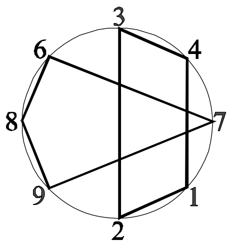
Рис. VI.5. Связи порядка *Фу Си и Вэнь вана* (продолжение)



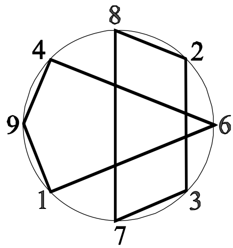
г) ФТ на *Фу Си*



ПЧ на *Вэнь ване*



д) ПЧ на *Фу Си*



ФТ на *Вэнь ване*

Нетрудно видеть, что:

1) $ФТ_1$ и $ФТ_2$ на *Фу Си* соответствуют на *Вэнь ване* $ПЧ_1$ и $ПЧ_2$.

2) $ПЧ_1$ и $ПЧ_2$ на *Фу Си* соответствуют на *Вэнь ване* $ФТ_2$ и $ФТ_1$.

Между прочим, 2) вовсе не является следствием 1) (!), и это еще раз показывает, что расположения чисел по *Вэнь вану* и *Фу Си* обладают глубокими внутренними связями.